# Sorozatok
# Megoldások

**1) Egy $(a_n)$ számsorozatról a következőket tudjuk:**

- **a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$;**
- **az $a_1$, $a_2$ és $a_3 - 9a_1$ ebben a sorrendben egy számtani sorozat 3 egymást követő tagja;**
- **az $(a_n)$ sorozat első öt tagjának összege 682.**

**Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja? (16 pont)**

***Megoldás:***

A megadott feltételeket a következő alakban használjuk:

(1) $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$, ha $n \geq 3$

(2) $2a_2 = a_1 + (a_3 - 9a_1)$

(3) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 682$ (4 pont)

A sorozat harmadik tagja az (1) alapján:

$a_3 = a_2 + 12a_1$ (1 pont)

Behelyettesítve a (2) összefüggésbe ezt az $a_3$ helyére, rendezés után kapjuk, hogy $a_2 = 4a_1$ (1 pont)

Ebből $a_3 = a_2 + 12a_1 = 4a_1 = 12a_1 = 16a_1$ (1 pont)

A negyedik tagot felírva az (1) alapján:

$a_4 = a_3 + 12a_2$ (1 pont)

A jobb oldalon behelyettesítve az $a_3$ és az $a_2$ az $a_1$-gyel kifejezett értéket kapjuk, hogy $a_4 = 16a_1 + 12(4a_1) = 64a_1$ (2 pont)

Hasonlóan fejezhetjük ki $a_5$ értékét $a_1$ segítségével:

$a_5 = a_4 + 12a_3 = 64a_1 + 12(16a_1) = 256a_1$ (2 pont)

Összevonás után $341a_1 = 682$

Ebből $a_1 = 2$ (1 pont)

A hatodik tagot felírva (1) alapján: $a_6 = a_5 + 12a_4$.

Az $a_5$ és az $a_4$ értékét $a_1$-gyel kifejezve kapjuk, hogy

$a_6 = 256a_1 + 12 \cdot 64a_1 = 1024a_1 = 1024 \cdot 2 = 2048$ (2 pont)

A kapott 2; 8; 32; 128; 512; 2048; ... számsorozat elemei kielégítik az $(a_n)$ sorozat elemiről megadott összes feltételt.

A sorozat hatodik tagja **2048** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**2) a) Legyen $(a_n)$ egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (6 pont)**

**b) Legyen $(b_n)$ egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (7 pont)**

**Megoldás:**

a) Az első sorozatban az első tagtól kezdve felírjuk a tagok 11-gyel való osztás maradékát: 5; 4; 1; 3; 9; 5; ... (1 pont)
A maradékok ciklikusan ismétlődnek (mindig 3-mal szorzunk) (1 pont)
Minden ötödik tag 1-es maradékot ad (2 pont)
tehát a valószínűség $\mathbf{1:5=0{,}2}$ (2 pont)

b) A számtani sorozatban az első tagtól kezdve felírjuk a tagok 11-gyel való osztás maradékát: 5; 8; 0; 3; 6; 9; 1; 4; 7; 10; 2; ... (1 pont)
Ettől kezdve ismétlődik: 5; 8; 0; ... (1 pont)
tehát a ciklushossz 11 (1 pont)
Egy ciklusban egy kedvező eset van (1 pont)
Mivel 10 ciklus van a 110. tagig, és mindegyikben egy darab 1-es van (1 pont)
így a keresett valószínűség $\frac{10}{110}=\mathbf{\frac{1}{11}}$ (2 pont)

**Összesen: 13 pont**

**3) Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármat adunk, akkor ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Adja meg ennek a számtani sorozatnak az első három tagját!**
**(14 pont)**

**Megoldás:**

A számtani sorozat első három tagjának összege: $26+(1+6+3)=36$ (1 pont)
Számtani közép miatt a második tagja 12. (2 pont)
jelöljük a számtani sorozat különbségét d-vel, ekkor a sorozat első három tagja $12-d$; 12; $12+d$ (1 pont)
A mértani sorozat tagjai: $11-d$; 6; $12+d$ (2 pont)
Mértani közép miatt $6^2=(11-d)\cdot(9+d)$ (2 pont)
ahonnan $d^2-2d-63=0$ (1 pont)
$d=9$ vagy $d=-7$ (1 pont)
Tehát a keresett számtani sorozat első három tagja **3; 12; 21** (1 pont)
illetve **19; 12; 5** (1 pont)
Ezek megfelelnek a feladat feltételeinek, a mértani sorozat megfelelő tagjai: 2;6;18 illetve 18;6;2 (2 pont)

**Összesen: 14 pont**

**4) Legyen *n* pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:**

$(a_n)$, **ahol** $a_n=(-2)^n+2^n$;

$(b_n)$, **ahol** $b_n=|n-23|-|n-10|$;

$(c_n)$, **ahol** $c_n=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$.

**Vizsgálja meg mindhárom sorozat korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszát indokolja!) Korlátos esetben adjon meg egy alsó és egy felső korlátot!** **(16 pont)**

***Megoldás:***

$\{a_n\}$, ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;

Ha $n$ páros, akkor $a_n = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n$ (1 pont)

Ha $n$ páratlan, akkor $a_n = -2^n + 2^n = 0$ (1 pont)

Az $\{a_n\}$ sorozat tehát **nem korlátos, nem monoton** (1 pont)

A $\{b_n\}$ sorozatot 3 intervallumon kell vizsgálni

$n < 10$; $\quad 10 \le n < 23$; $\quad 23 \le n$ (1 pont)

$\{b_n\}$, ahol $b_n = |n-23| - |n-10|$

Az abszolútérték értelmezése alapján,

Ha $n < 10$, akkor $b_n = (23-n) - (10-n) = 13$ (1 pont)

Ha $10 \le n < 23$, akkor $b_n = (23-n) - (n-10) = -2n + 33$ (1 pont)

Ezen a tartományon $-13 < b_n \le 13$ (1 pont)

Ha $23 \le n$, akkor $b_n = (n-23) - (n-10) = -13$ (1 pont)

A $\{b_n\}$ sorozat tehát **korlátos és monoton csökkenő**, alsó korlátja: **−13**, felső korlátja: **13** (1 pont)

$\{c_n\}$, ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)^2$

Használjuk az $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot n$ jelölést! Ekkor a négyzetre emelés, Pitagoraszi összefüggés és a kétszeres szögfüggvény képletének alkalmazásával:

$c_n = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$ (2 pont)

Visszaírva $\alpha$ eredeti jelentését kapjuk, hogy $c_n = 1 + \sin(\pi \cdot n) = 1$, mivel $\sin(\pi \cdot n)$ értéke minden $n$ egész esetén 0 (1 pont)

A $\{c_n\}$ sorozat monoton, (1 pont)

és **korlátos** (1 pont)

Alsó korlátja **1** (1 pont)

felső korlátja is **1** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**5) Egy bank a „Gondoskodás" nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első napján történhet, amely évben a gyermekük betölti 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napján ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.**

**a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse! (8 pont)**

**A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi, választhatja a következő lehetőséget is:**

**Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank –az első pénzfelvételtől számítva– minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napján jóváír.**

**b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse! (8 pont)**

***Megoldás:***

a) A számlanyitás összege: $a_1 = 100000$. A következő év első banki napján a számlán lévő pénz $a_2 = a_1 \cdot 1{,}08 + a_1 = 208000$ (1 pont)

A következő év első banki napján a számlán lévő pénz: $a_3 = a_2 \cdot 1{,}08 + a_1 = a_1 \cdot \left(1{,}08^2 + 1{,}08 + 1\right) = 324640$ (1 pont)

Összesen 18 alkalommal fizettek be a számlára, így az utolsó befizetéskor a számlán lévő összeg: $a_{18} = a_1 \cdot \left(1{,}08^{17} + 1{,}08^{16} + \ldots + 1{,}08 + 1\right)$ (2 pont)

Ez az összeg még egy évig kamatozik, így a számlához való hozzáférés időpontjában a számlán lévő összeg $c = a_1\left(1{,}08^{18} + 1{,}08^{17} + \ldots + 1{,}08\right)$ (1 pont)

A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első 18 tagjának összege. A sorozat első tagja 1,08 és a hányadosa is 1,08. (1 pont)

$c = a_1 \cdot 1{,}08 \cdot \dfrac{1{,}08^{18} - 1}{1{,}08 - 1} \approx 4044626$ (1 pont)

A számlán lévő összeg kerekítve **4044626 Ft**. (1 pont)

b) Az induló tőke $c = 4044626$ Ft

Jelölje $y$ az évenként felvehető összeget. Az első kivét után a számlán lévő pénz $b_1 = c - y$ (1 pont)

A második kivét után a számlán lévő pénz:

$b_2 = b_1 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05 - y(1{,}05 + 1)$ (1 pont)

A harmadik kivét után a számlán lévő pénz:

$b_3 = b_2 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05^2 - y\left(1{,}05^2 + 1{,}05 + 1\right)$ (1 pont)

$b_6 = b_5 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05^5 - y\left(1{,}05^5 + \ldots + 1{,}05 + 1\right)$ (1 pont)

Ugyanekkor a számla kiürül: $b_6 = 0$ (1 pont)

A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első 6 tagjának összege. A sorozat első tagja 1 és a hányadosa 1,05 (1 pont)

Így $y = c \cdot \dfrac{1{,}05^5}{\dfrac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1}}$ (1 pont)

Az alkalmanként felvehető összeg kerekítve **758916 Ft**. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**6) Az $(a_n)$ mértani és $(b_n)$ számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét orozat hatodik tagja $(-1)$.**

**a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját! (4 pont)**

**b) Milyen pozitív egész *n*-ekre lesz a két sorozat első *n* tagjának összege ugyanakkora? (9 pont)**

***Megoldás:***

a) Felírva a hatodik elemeket az első elem és a kvóciens ($q$), illetve a differencia ($d$) segítségével kapjuk, hogy $q = -1$. (1 pont)

$d = -\frac{2}{5}$ (1 pont)

A mértani sorozat első öt eleme: $\mathbf{1; -1; 1; -1; 1}$ (1 pont)

A számtani sorozat első öt eleme: $\mathbf{1; \frac{3}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}}$ (1 pont)

b) A mértani sorozat első $n$ tagjának összege:

$S_n = 1 \cdot \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \begin{cases} 0, \text{ ha } n \text{ páros} \\ 1, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$ (2 pont)

A számtani sorozat $n$-edik tagja: $b_n = 1 - \frac{2}{5}(n-1)$ (1 pont)

A számtani sorozat első $n$ tagjának összege: $s_n = \frac{2 - \frac{2}{5}(n-1)}{2} \cdot n$, azaz

$s_n = \frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2$ (1 pont)

$s_n = 0$, azaz a $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív egész megoldása van, az $n = 6$ (2 pont)

$s_n = 1$, tehát $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 1$, azaz $n^2 - 6n + 5 = 0$ egyenlet megoldásai $n = 1$ és $n = 5$. (2 pont)

**Tehát a két sorozat első 1, vagy első 5, vagy első 6 tagjának összege ugyanakkora** (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**7) Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak? (13 pont)**

***Megoldás:***

Legyen a sorozat első tagja $a$, hányadosa $q$.

$a + aq + aq^2 = 91$ (1 pont)

$aq^5 + aq^6 + aq^7 = 2912$ (1 pont)

$q^5(a + aq + aq^2) = 2912$ (1 pont)

$q^5 = \frac{2912}{91} (= 32)$ (1 pont)

Ebből $q = 2$ (1 pont)

Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $7a = 91$, ahonnan $a = 13$, ezek szerint a mértani sorozat: $a = 13, q = 2, a_n = 13 \cdot 2^{n-1}$ (1 pont)

A kérdés: hány $n$-re igaz, hogy $10^{12} \le 13 \cdot 2^{n-1} \le 10^{13}$ (2 pont)

Az $\lg x$ függvényszigorú monoton nő (1 pont)

$12 \le \lg 13 + (n-1)\lg 2 < 13$ (1 pont)

$37,16 < n < 40,48$ (1 pont)

Ennek egész megoldása a 38, a 39 és a 40. (1 pont)
A sorozat **3** tagja 13 jegyű (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**8) A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapat között kiosztott pontszámok összege 139.**

**a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot! (8 pont)**

**Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).**

**b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai? (5 pont)**

***Megoldás:***

a) második helyezett $x$, az első $\frac{4}{3}x$ pontot ért el. (1 pont)

A második $x$, a negyedik 25 pontot ért el, így a mértani sorozat miatt a harmadik helyezett pontszáma $\sqrt{25x}$. (1 pont)

A szöveg szerint: $\frac{4}{3}x + x + \sqrt{25x} + 25 = 139$ (1 pont)

Rendezve $\sqrt{x}$-re másodfokú: $7\left(\sqrt{x}\right)^2 + 15\sqrt{x} - 342 = 0$ (1 pont)

Két gyöke $\sqrt{x} = 6$ és $\sqrt{x} = -\frac{57}{7}$, ebből a negatív gyök nem lehetséges (1 pont)

így $x = 36$ (1 pont)

**Tehát a 2. helyezett pontszáma 36, a harmadiké 30, az első helyezetté pedig 48.** (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

a) (Legyen $q$ a mértani sorozat hányadosa.) A negyedik helyezett 25, a harmadik $25q$, a második $25q^2$ pontot ért el. (1 pont)

Az első helyezett pontszáma $\frac{4}{3} \cdot 25q^2 + 75q = \frac{100q^2}{3}$ (1 pont)

Szöveg szerint $\frac{100q^2}{3} + 25q^2 + 25q + 25 = 139$ (1 pont)

Rendezés után: $175q^2 + 75q - 342 = 0$ (1 pont)

Két megoldása: $q = \frac{6}{5}$ és $q = -\frac{57}{35}$ (1 pont)

Ebből az utóbbi nem felel meg a szövegnek (1 pont)

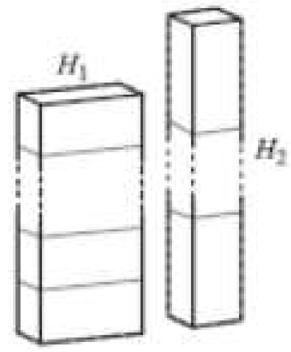
**tehát a harmadik helyezett pontszáma 30, másodiké 36, az első helyezetté pedig 48.** (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 15. feladat*

**Összesen: 13 pont**

**9) Két egyenes hasábot építünk, $H_1$-et és $H_2$-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágok, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A $H_1$ hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a $H_2$ hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.**




**a) A $H_1$ és $H_2$ egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha $H_1$-et és $H_2$-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?** **(8 pont)**

**b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozat szigorú monoton csökkenő és korlátos!** **(8 pont)**

***<u>Megoldás:</u>***

a) *Lásd: Térgeometria 11. feladat*

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+5)(4n+1)}{(4n+5)(3n+2)} =$ (1 pont)

$\frac{12n^2+23n+5}{12n^2+23n+10}\left(=1-\frac{5}{12n^2+23n+10}\right)$ (1 pont)

A fenti hányados minden pozitív egész $n$ esetén 1-nél kisebb (1 pont)
a sorozat minden tagja pozitív (1 pont)
ezért a sorozat szigorú monoton csökkenő (1 pont)
Ebből következik, hogy a sorozat felülről korlátos (1 pont)
Mivel a sorozat minden tagja pozitív, így alulról is korlátos (1 pont)
**tehát a sorozat korlátos** (1 pont)

**Összesen 16 pont**

**10) a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát!** **(5 pont)**

**b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs $60^\circ$-os szöge!** **(11 pont)**

***<u>Megoldás:</u>***

a) Ha $d$ a számtani sorozat differenciája, akkor a háromszög oldalhosszai 4 $(4+d)$, $(4+2d)$ (és $0<d$) (1 pont)

A háromszög derékszögű, így $4^2+(4+d)^2=(4+2d)^2$ (1 pont)

Négyzetre emelve, rendezve: $3d^2+8d-16=0$ (1 pont)

A gyökök $d_1=-4$ és $d_2=\frac{4}{3}$ (1 pont)

A negatív gyök nem megoldás, a háromszög oldalai tehát **4, $\frac{16}{3}$, $\frac{20}{3}$** egység hosszúak (1 pont)

b) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van $60°$-os szöge a háromszögnek. (1 pont)
Mivel az oldalak páronként különböző hosszúságúak, és a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, (1 pont)
ezért ha van $60°$-os szöge, akkor az a $4+d$ hosszúságú oldallal szemben van (2 pont)
Erre az oldalra felírva a koszinusztételt: $(4+d)^2 = 4^2 + (4+2d)^2 - 2\cdot 4\cdot(4+2d)\cdot\cos 60°$ (2 pont)
Ebből $16+8d+d^2 = 16+8d+4d^2$ (1 pont)
Ebből $d^2 = 0$, tehát $d = 0$ (1 pont)
Ez viszont ellentmond annak, hogy a háromszög nem szabályos (2 pont)
**Az eredeti feltételezésünk tehát hamis, azaz a háromszögnek valóban nincs $60°$-os szöge.** (1 pont)

**Összesen 16 pont**

**11) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja? (13 pont)**

***Megoldás:***

Ha a számtani sorozat második tagja $a_2$ és differenciája $d$, akkor
$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 60$ (2 pont)
ahonnan $a_2 = 20$ (1 pont)
A mértani sorozat első három tagja: $84-d; 20; 20+d$ (1 pont)
A mértani közép miatt $(84-d)(20+d) = 400$ (2 pont)
Rendezve az egyenletet $d^2 - 64d - 1280 = 0$ (2 pont)
Innen $d_1 = -16$ vagy $d_2 = 80$ (2 pont)
$d_1 = -16$ nem megoldás, mert a számtani sorozat növekvő. (1 pont)
$d_2 = 80$ esetén a számtani sorozat első három tagja $\mathbf{-60; 20; 100}$, ami valóban megoldás (1 pont)
Ekkor a mértani sorozat $\mathbf{4; 20; 100}$ (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**12) Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-jén. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt most unokájának most adja át.**

**a) Mekkora összeget kapott Péter? (5 pont)**

**b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára? (9 pont)**

***Megoldás:***

a) A nagypapa kilenc alkalommal tett pénzt a perselybe. A Péter által kapott összeg egy olyan számtani sorozat első kilenc elemének összege, amelynek első eleme 5000, differenciája 1000. (2 pont)

A kérdéses összeg: $\frac{9}{2} \cdot \left(2 \cdot 5000 + (9-1) \cdot 1000\right) = 81000$

Péter **81000 Ft-ot kapott** (3 pont)

b) $t_0 = 60000,\ t_n = t_0 \cdot 1{,}04^n = 60000 \cdot 1{,}04^n$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$ (2 pont)

A feltétel szerint $60000 \cdot 1{,}04^n \geq 100000$ (2 pont)

Osszuk mindkét oldalt 60000-rel, majd vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $\lg 1{,}04^n \geq \lg \frac{5}{3}$ (3 pont)

Innen $n \geq \frac{\lg \frac{5}{3}}{\lg 1{,}04} \approx 13{,}024 > 13$, ami azt jelenti, hogy **14 évet** kell várnia Péternek (2 pont)

**Összesen: 14 pont**

**13) A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni *n*-edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n-1)$-edik órában megtett útjának ($n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$).**

**a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg! (4 pont)**

**A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t megtesz.**

**b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni? (6 pont)**

**A „Végkimerülés" kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.**

**c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés" kategóriában? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) Egy óra alatt megtett úthosszak km-ben mérve egy olyan mértani soroz egymást követő tagjai, (1 pont)

amelynek első tagja 45, hányadosa pedig 0,955 (1 pont)

$a_{10} = a_1 - q^9 = 29{,}733$ (1 pont)

A magyar autó 10. órában megtett útja kb **30 km** (1 pont)

b) Addig nem érdemes akkumulátort cserélni, amig $45 \cdot 0{,}955^{n-1} \geq 20$ teljesül ($n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$) (1 pont)

Mivel a tízes alapú logaritmus függvény szigorú monoton nő, ezért (1 pont)

$(n-1)\lg 0,955 \geq \lg \frac{20}{45}$ (1 pont)

$\lg 0,955 \geq 0$, ebből adódik, hogy (1 pont)

$n \leq \frac{\lg \frac{20}{45}}{\lg 0,955} + 1 \approx 18,61$ (1 pont)

Legkorábban a **19. órában** érdemes akkumulátort cserélni. (1 pont)

c) Ha a verseny kezdetétől eltelt egész órák száma $n$, akkor ennyi idő alatt a magyar autó által megtett út a mértani sorozat első $n$ tagjának összege(1 pont)

$S_n = \frac{45 \cdot \left(0,955^n - 1\right)}{0,955 - 1} > 1100$ (1 pont)

Megoldandó a $\frac{45 \cdot \left(0,955^n - 1\right)}{0,955 - 1} > 1100$ egyenlőtlenség (1 pont)

Rendezve a $0,955^n < -0,1$ egyenlőtlenséget kapjuk (1 pont)

Ennek nincsen megoldása (1 pont)

**Tehát a világrekordot nem döntheti meg a magyar autó** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**14) a) Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják, és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.) (5 pont)**

**b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (9 pont)**

***Megoldás:***

a) A március 1-jén felvett hitel $365 - 31 - 28 = 306$ napig,
Az október 1-jén felvett hitel pedig $31 + 30 + 31 = 92$ napig kamatozik (1 pont)

A napi kamatláb $\frac{8}{365}$% (1 pont)

Az első hitel kamata $40000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 306 \approx 2683$ Ft (1 pont)

A második hitel kamata pedig $40000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 92 \approx 807$ Ft (1 pont)

**Összesen 3490 Ft kamatot tőkésít** a bank december 31-én (1 pont)

b) Ha $x$ Ft volt az évi törlesztőrészlet, akkor

$$\left(\left(\left(1000000\cdot 1{,}08-x\right)\cdot 1{,}08-x\right)\ldots\right)\cdot 1{,}08-x=0$$ (2 pont)

Rendezve $1000000\cdot 1{,}08^{10}-x\cdot\left(1{,}08^{9}+1{,}08^{8}+\ldots+1\right)=0$ (2 pont)

A zárójelben egy mértani sorozat első 10 tagjának összege van (1 pont)

$$S_{10}=\frac{1{,}08^{10}-1}{1{,}08-1}\approx 14{,}487$$ (1 pont)

Az egyenletből $x=\dfrac{1000000\cdot 1{,}08^{10}}{S_{10}}$ (1 pont)

$x\equiv 149025$ (1 pont)

Tehát ezresekre kerekítve **149000 az éves törlesztőrészlet** (1 pont)

**Összesen: 14 pont**

**15) Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7.**

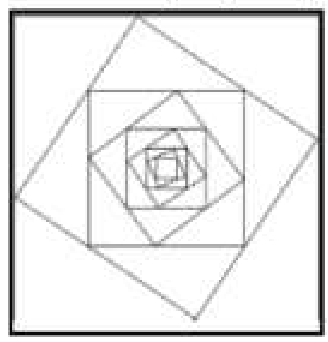
**a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg! (10 pont)**

**A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5:7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.**

**b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Síkgeometria 17. feladat*



b) Jó ábra felrajzolása (1 pont)

$K_1=4,\ K_2=4\cdot\dfrac{5}{7}$

minden további négyzet 5/7 szerese a megelőzőnek (1 pont)

A négyzetek kerületének összege egy végtelen mértani sor összege, melynek hányadosa $q=\dfrac{5}{7}$ (1 pont)

Mivel $|q|<1$ ezért a sor konvergens (1 pont)

A végtelen mértani sor összege:

$$S=K_1+K_2+\ldots=K_1\cdot\frac{1}{1-q}$$ (1 pont)

$$=\frac{4}{1-\frac{5}{7}}=14$$ (1 pont)

Tehát a négyzetek kerületének összege **14 méter.** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**16) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$ .**

**a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)**

**b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje $t_1$, a $t_1$ területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét $t_2$, és így tovább, képezve ezzel a $(t_n)$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Síkgeometria 19. feladat*

b) A $t_1$ területű szabályos hatszög oldala az *ABC* háromszög *AC* oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala, (1 pont)

hossza $a_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, (1 pont)

$t_1 = 6\dfrac{a_1^{\,2}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{75\sqrt{3}}{4}$ (1 pont)

A következő szabályos hatszög $t_2$ területét megkaphatjuk például úgy, hogy a $t_1$ területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk $t_1$-ből.

$$t_2 = t_1 - 6\frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2\cdot\sin 120^\circ}{2} = \frac{3\cdot 75\sqrt{3}}{16}\left(=\frac{225\sqrt{3}}{16}\right).$$ (2 pont)

A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat, (1 pont)

amelynek hányadosa $q = \dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{3}{4}$. (1 pont)

A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \dfrac{75\sqrt{3}}{4}$, hányadosa pedig $q = \dfrac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n) = \dfrac{t_1}{1-q} =$ (1 pont)

$= \mathbf{75\sqrt{3}}$. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**17) Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, amikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta? (12 pont)**

***Megoldás:***

A havi zsebpénzek értékei egy számtani sorozat tagja (1 pont)

ahol $d = 50, a_n = 1850, S_n = 35100$ (1 pont)

$1850 = a_1 + (n-1)\cdot 50$ (1 pont)

azaz $a_1 = 1900 - 50n$ (1 pont)

$S_n = 3500 = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \dfrac{1900 - 50n + 1850}{2}\cdot n$ (2 pont)

$70200 = 3750n - 50n^2$

rendezve: $n^2 - 75n + 1404 = 0$ (2 pont)

Megoldva: $n = 36$ vagy 39 (1 pont)

$n = 39$ nem megoldás mert akkor $a_1$ negatív (1 pont)

Ha $n = 36$, akkor $a_1 = 1900 - 50 \cdot 36 = 100$ (1 pont)

**Kinga induló zsebpénze 100 Ft volt, és a 10. születésnapja óta 35 hónap telt el.** (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**18) Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1000000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.**

**a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg!) (3 pont)**

**b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)**

**c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen kedvezőbb? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (5 pont)**

***Megoldás:***

a) Kéthavonta 1,7 %-kal lesz több pénze, ami három ciklusban $1{,}017^3$-es szorzót jelent. (2 pont)

Hat hónap után tehát a pénze $1000000 \cdot 1{,}017^3 =$ **1051872 Ft** lenne. (1 pont)

b) A megadott árfolyamon 1000000 forintért $\frac{1000000}{252} = 3968{,}25$ eurót kap. (1 pont)

Ez az összeg hat hónap alatt, havi tőkésítés mellett hatszor kamatozik, tehát $1{,}0025^6$-szorosára növekszik. (2 pont)

Hat hónap múlva $3968{,}25 \cdot 1{,}0025^6 \approx$ **4028,15 eurója** lenne. (1 pont)

c) Legyen 1 euró a nyáron $x$ Ft. Ha jobban jár, az azt jelenti, hogy $4028{,}15x > 1051872$ (2 pont)

amiből $x > 261{,}13$ (1 pont)

Ebből az árfolyamarány $\frac{261{,}13}{252} = 1{,}03623$, **tehát legalább kb. 3,63%-kal kellene nőnie a forint/euró árfolyamnak**. (2 pont)

**Összesen: 12 pont**

**19) András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, naponta 10000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, pároson 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.**

**a) Hány métert úszott le András a 6. napon? (4 pont)**

**b) Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt? (6 pont)**

**c) Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen kiválasztunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20000 métert teljesített? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) Jelölje $a_n$ az $n$-edik napon leúszott hosszat, méterben mérve.

$a_1 = 10000 \cdot 1{,}1 = 11000$

$a_2 = a_1 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = 9900$ (1 pont)

$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = 10000 \cdot 1{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 10890$

$a_4 = a_3 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 9801$ (1 pont)

$a_5 = a_4 \cdot 1{,}1 = 10000 \cdot 1{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 \approx 10781$

$a_4 = a_5 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1^3 \cdot 0{,}9^3 \approx 9703$ (1 pont)

A hatodik napon tehát kb. **9703 métert** úszott (1 pont)

b) A páratlan és páros sorszámú napokon leúszott hosszak is egy-egy mértani sorozat első 10 tagját alkotják. A páratlan sorszámúaknak az elő tagja 11000, hányadosa 0,99, a páros sorszámúak első tagja 9900, hányadosa 0,99.

(1 pont)

A páratlan sorszámú napokon:

$S_{ptl} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{19} = 11000 + 11000 \cdot 0{,}99 + \ldots + 11000 \cdot 0{,}99^9 =$ (1 pont)

$= 11000 \cdot \dfrac{1 - 0{,}99^{10}}{1 - 0{,}99} \approx 105179{,}7$ (1 pont)

A páros sorszámú napokon:

$S_{ps} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{20} = 9900 + 9900 \cdot 0{,}99 + \ldots + 9900 \cdot 0{,}99^9 =$ (1 pont)

$= 9900 \cdot \dfrac{1 - 0{,}99^{10}}{1 - 0{,}99} \approx 94661{,}7$ (1 pont)

Az első húsz napon kb. **199841** métert úszott összesen (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 54. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**20) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.**

**a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő! (4 pont)**

**András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.**

**b) Hány éves András? (6 pont)**

**András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek.**

**c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) Ha a sorozat második tagját $a_2$-nek jelöljük, akkor az első három tag átlaga is $a_2$. (1 pont)

Ha a számtani sorozat differenciáját $d$-nek jelöljük, akkor a szórásnégyzet:

$$\frac{(a_2-d-a_2)^2+0^2+(a_2+d-a_2)^2}{3}=6\,.$$ (1 pont)

Innen adódik, hogy $d^2=9$, (1 pont)

azaz, mivel a sorozatunk növekedő $\boldsymbol{d=3}$. **Ezzel az állítást beláttuk**. (1 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 32. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 29. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**21) Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, az alábbi módon kezdve:**

$$\mathbf{(1),(2;3),(4;5;6),(7;8;9;10),\ldots}$$

**a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme? (5 pont)**

**b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme? (9 pont)**

***Megoldás:***

a) A csoportokban lévő számok számát megadó sorozat: $1;2;3;4;\ldots;n;\ldots$

A 99-edik csoportban lévő utolsó szám: $1+2+3+4+\ldots+99$ (2 pont)

amely $\frac{1+99}{2}\cdot 99=4950$ (2 pont)

Tehát a 100. csoport első eleme **4951** (1 pont)

b) Ha az 1851 az $n+1$-edik csoportban van, akkor

$\frac{1+n}{2}\cdot n<1851\le\frac{1+(n+1)}{2}(n+1)$, ahol $n$ pozitív egész (3 pont)

Tehát azt a pozitív egész $n$-t keressük, amelyre $n^2+n-3702<0$ és $n^2+3n-3700\ge 0$ (1 pont)

Az első egyenlőtlenség pozitív egész megoldásai a 60-nál nem nagyobb pozitív egész számok (1 pont)

A második egyenlőtlenség pozitív megoldásai a 60-nál nem kisebb pozitív egész számok (1 pont)

Az egyenletrendszernek egyetlen egész megoldása van, a 60 (1 pont)

A 60-adik csoport utolsó eleme $\frac{1+60}{2}\cdot 60=1830$ (1 pont)

A 61. csoport első eleme 1831. Mivel ennek a csoportnak 61 eleme van, így ennek eleme az 1851 is, mégpedig a 21-edik eleme.

Tehát az 1851 a **61. csoport 21. eleme.** (1 pont)

**Összesen: 14 pont**

**22) Éva egy $7\times 7$-es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | 91 | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | 11 | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

**a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta? (5 pont)**

**Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.**

**b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz! (6 pont)**

**c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz! (5 pont)**

***Megoldás:***

a) $a_{17} = 91$ és $a_{33} = 11$ (1 pont)

Ebből $d = -5$, (1 pont)

majd $a_1 = 171$. (1 pont)

$$S_{49} = \frac{\left[2 \cdot 171 + (49-1) \cdot (-5)\right] \cdot 49}{2} =$$ (1 pont)

$= \mathbf{2499}$ (1 pont)

b) Adjuk össze a sorozat főátlóban álló tagjait! (Ezek összege 357.) (1 pont)

Ha a táblázat két kiválasztott sorában felcseréljük, hogy melyik sorban melyik oszlopból választottuk ki a sorozat tagját, (1 pont)

akkor (ha az érintett oszlop sorszáma között $k$ a különbség) az egyik oszlopban $k \cdot d$-vel nő, a másik oszlopban $k \cdot d$-vel csökken a kiválasztott tag értéke. (2 pont)

Tehát a sorozat hét kiválasztott tagjának összege a két tag cseréje után ugyanannyi marad, mint amennyi a csere előtt volt. (1 pont)

Mivel a sorozat **főátlóban álló tagjaiból kiindulva, két-két tag cserélgetésével bármelyik kiválasztott számheteshez eljuthatunk, a tagok összege bármely hét tag (leírtak szerinti) kiválasztása esetén ugyanannyi (357).** (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 32. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**23) Egy pénzintézet a tőle felvett $H$ forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$-os kamattal számol $(p > 0)$, ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \dfrac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \dfrac{p}{100}$, az $n$ pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészletet (ez a hitel futamideje).**

**a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?**
**Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (4 pont)**

**b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os? (8 pont)**

**c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértékét, ha $q = 1{,}02$ és $H = 2\,000\,000$**

**(4 pont)**

**_Megoldás:_**

a) A havi törlesztés összege (Ft-ban):

$t_{72}=1{,}6\cdot 10^{6}\cdot\dfrac{1{,}02^{72}\cdot 0{,}02}{1{,}02^{72}-1}\approx 42123$. (2 pont)

A 72 hónap alatt összesen $72\cdot t_{72}\approx 3032856$ forintot fizetünk vissza,

(1 pont)

ami ezer forintra kerekítve **3 033 000 Ft.** (1 pont)

b) Azt a legkisebb $n$ pozitív egész számot keressük, amelyre

$2\cdot 10^{6}\cdot\dfrac{1{,}02^{n}\cdot 0{,}02}{1{,}02^{n}-1}\le 60000$. (2 pont)

Mivel $1{,}02^{n}-1>0$, ezért $0{,}02\cdot 1{,}02^{n}\le 0{,}03\cdot\left(1{,}02^{n}-1\right)$. (1 pont)

$3\le 1{,}02^{n}$ (1 pont)

Az 1,02 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő. (1 pont)

ezért $n\ge\log_{1{,}02}3$. (1 pont)

A logaritmus azonosságát használva: $n\ge\dfrac{\lg 3}{\lg 1{,}02}\approx 55{,}48$ (1 pont)

Tehát a törlesztőrészletek száma **legalább 56** azaz legalább 56 hónapos futamidőt kell választanunk. (1 pont)

c) A megadott számokkal $t_{n}=H\cdot(q-1)\cdot\dfrac{q^{n}}{q^{n}-1}=40000\cdot\dfrac{1{,}02^{n}}{1{,}02^{n}-1}$ (1 pont)

Egyszerűsítés után: $t_{n}=40000\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1{,}02^{n}}}$ (1 pont)

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1{,}02^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1{,}02}\right)^{n}=0$, (1 pont)

ezért $\lim\limits_{n\to\infty}t_{n}=40000\cdot\dfrac{1}{1-0}=$ **40 000.** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**24) Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén összefüggő olajfolt keletkezett. A szakemberek műholdak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt.**

**a) Ha az első megfigyeléskor 400 m² volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva? (4 pont)**

**A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a 12 400 m² területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m²-ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe 12 270 m² lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.**

**b) Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a 12 400 m²-es olajfolt teljes eltávolítása? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) Óránként 4, egy nap alatt tehát $(24 \cdot 4 =)$ 96 alkalommal történik meg a 2%-os növekedés. (1 pont)

Az olajfolt területe 15 perc alatt 1,02-szorosára nő, (1 pont)

tehát egy nap múlva $400 \cdot 1{,}02^{96} \approx$ (1 pont)

$\approx$ **2677 m² lett.** (1 pont)

b) A naponta eltávolított olajfoltterületek (m²-ben mérve) egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek első tagja 130, az első 31 tagjának összege pedig 12 400 (2 pont)

A napi növekedés legyen $d$ (m²). Ekkor szórása $\frac{(260+30d)\cdot 31}{2} = 12400$.

(1 pont)

Ebből $d = 18$ (m²). (1 pont)

A napi növekedés tehát **18 m²** volt. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

**Összesen 10 pont**

**25) a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot! (6 pont)**

**Tekintsük a következő állítást: *Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.* (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)**

**b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!(3 pont)**

**c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (4 pont)**

***Megoldás:***

a) Ha a számtani sorozat első tagja a, akkor a 3. tagja $a + 3{,}2$. A 7. tag $a + 9{,}6$.

(1 pont)

A mértani sorozat tulajdonsága miatt $(a+3{,}2)^2 = a(a+9{,}6)$. (1 pont)

$a^2 + 6{,}4a + 10{,}24 = a^2 + 9{,}6a$ (1 pont)

$3{,}2a = 10{,}24 \Rightarrow a = 3{,}2$ (1 pont)

A három szám: **3,2; 6,4; 12,8**. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) *Lásd: Függvények - Analízis 29. feladat*

c) *Lásd: Függvények - Analízis 29. feladat*

**Összesen 13 pont**

**26) Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.**

**a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette! (6 pont)**

**A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a. Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.**

**b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette! (3 pont)**

**A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.**

**a) Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza? (7 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Valószínűségszámítás 43. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 43. feladat*

c) A négyszög oldalainak cm-ben mért hosszát valamely körüljárási irányban jelölje $e$, $f$, $g$, $h$. Az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, ezért $e+g=f+h=40$. (1 pont)

Feltehetjük, hogy $e=23$, ekkor $f=17$; valamint hogy $f>h$ (mert a számtani sorozat különbsége $d\neq 0$). (1 pont)

(Esetszétválasztást végzünk $e$ és $f$ nagyságviszonya alapján.) Ha $f>e$, akkor ($h<g$, és) a sorozat különbsége $d=e-g=6$; (1 pont)

így $f=e+6=29$ és $h=g-6=11$. (1 pont)

Ha $f<e$, akkor ($g<h<f<e$, és) a sorozat különbségére $3d=e-g=6$, innen $d=2$. (1 pont)

$h=g+2=19$ és $f=h+2=21$. (1 pont)

A négyszög másik három oldala tehát **11, 17 és 29, illetve 17, 19 és 21 (cm)** lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.) (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**27) a) Egy mértani sorozat hányadosa $\frac{1}{4}$, a sorozat első öt tagjának összege 852,5. Határozza meg a sorozat első tagját! Számításai során ne használjon közelítő értéket! (4 pont)**

**b) Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 852,5; első tíz tagjának összege pedig 2330. Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját! (7 pont)**

***Megoldás:***

a) Ha a sorozat első tagja $a$, akkor (a mértani sorozat összegképlete szerint):

$$a\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5-1}{\frac{1}{4}-1}=852,5$$

(1 pont)

$$a\cdot\frac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{3}{4}}=a\cdot\frac{341}{256}=852,5$$

(2 pont)

$$a=\frac{852,5\cdot 256}{341}=\mathbf{640}$$ (1 pont)

b) Jelölje a sorozat első tagját $a$, a differenciáját $d$.

Ekkor az $S_5 = \frac{a+a+4d}{2} \cdot 5$, az $S_{10} = \frac{a+a+9d}{2} \cdot 10$. (1 pont)

Megoldandó tehát az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 5a+10d &= 852,5 \\ 10a+45d &= 2330 \end{aligned}\right\}.$$ (1 pont)

Az első egyenletből $a = \frac{852,5-10d}{5} = 170,5-2d$.

Ezt beírjuk a második egyenletbe: $10 \cdot (170,5-2d)+45d = 2330$, azaz $1705+25d = 2330$. (2 pont)

Innen $\boldsymbol{d = 25}$ a differencia. (1 pont)

$a = 170,5-2d \cdot 25 = \mathbf{120,5}$ a sorozat első tagja. (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján:

A sorozat ötödik tagja 220,5, tizedik tagja 345,5.

Az első öt tag összege $\frac{120,5+220,5}{2} \cdot 5 = 852,5$, az első tíz tag összege $\frac{120,5+345,5}{2} \cdot 10 = 2330$. (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

**28) a) Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (6 pont)**

**b) Hány olyan pozitív szám van, amelynek összege és szorzata is 12? (7 pont)**

***Megoldás:***

a) Jelölje a mértani sorozat hányadosát $q$.

$q^5 \left(= \frac{384}{12}\right) = 32$ (1 pont)

innen pedig $q = 2$ (1 pont)

A sorozat első hat tagja tehát $\frac{3}{2}; 3; 6; 12; 24; 48$ (1 pont)

ezek átlaga 15,75. (1 pont)

Az ettől mért átlagos abszolút eltérés:

$\frac{|1,5-15,75|+|3-15,75|+...|48-15,75|}{6} =$ (1 pont)

$= \mathbf{13,5}$ (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 11. feladat*

**Összesen: 13 pont**

**29) a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb $n$ egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai! (7 pont)**

**b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb $n$ egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$, és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!** **(9 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Bizonyítások 29. feladat*

b) A számtani tulajdonság miatt: $\binom{n}{4}+\binom{n}{6}=2\binom{n}{5}$. (1 pont)

A binomiális együtthatókat kifejtve

$\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}+\frac{n!}{(n-6)!\cdot 6!}=2\cdot\frac{n!}{(n-5)!\cdot 5!}$. (2 pont)

Mindkét oldalt $n!$-sal osztva és $6!$-sal szorozva:

$\frac{5\cdot 6}{(n-4)!}+\frac{1}{(n-6)!}=2\cdot\frac{n!}{(n-5)!\cdot 5!}$. (2 pont)

Mindkét oldalt $(n-4)!$-sal szorozva:

$30+(n-4)(n-5)=12(n-4)$. (1 pont)

A műveleteket elvégezve és rendezve:

$n^2-21n+98=0$, (1 pont)

ahonnan $\boldsymbol{n=7}$ vagy **14.** (1 pont)

Ellenőrzés: mindkettő valóban jó megoldás hiszen:

$\binom{7}{4}=35$, $\binom{7}{5}=21$ és $\binom{7}{6}=7$ $(d=-14)$, valamint

$\binom{14}{4}=1001$, $\binom{14}{5}=2002$ és $\binom{14}{6}=3003$ $(d=1001)$. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**30) Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36\cdot\sqrt{2}$ egység.**

**a) Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával?** **(4 pont)**

**b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)** **(3 pont)**

**c) Az alapél és a testátló hosszát – ebben a sorrendben - tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak a második tagja!** **(4 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Térgeometria 1. feladat*

b) *Lásd: Térgeometria 1. feladat*

c) Ha a mértani sorozat első tagja $a$, hányadosa $q$, akkor $a=AB=18$ és $a\cdot q^3=AG=36\cdot\sqrt{2}$ (1 pont)

innen $q^3=2\sqrt{2}$ (1 pont)

azaz $q=\sqrt{2}$ (1 pont)

**A mértani sorozat második tagja tehát $a\cdot q=\mathbf{18}\cdot\sqrt{2}$ és ez éppen az alaplap átlójának hossza.** (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

**31) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának az összege pedig 130.**

**a) Adja meg a sorozat ötödik tagját! (5 pont)**

**A $\{b_n\}$ mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, második és negyedik tagjának összege pedig 130.**

**b) Adja meg a sorozat ötödik tagját! (6 pont)**

***Megoldás:***

a) A számtani sorozat ismert tulajdonságai miatt (három szomszédos tag közül a középső a két szomszédos tag számtani közepe): (1 pont)

$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{26}{2} = 13$, (1 pont)

és $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{130}{2} = 65$. (1 pont)

$d = (a_3 - a_2 = 65 - 13 =)52$. (1 pont)

A sorozat ötödik tagja $\boldsymbol{a_5 = a_3 + 2d = 169}$. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

A sorozat első négy tagja: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d$. (1 pont)

A feltételek szerint $2a_1 + 2d = 26$ és $2a_1 + 4d = 130$. (1 pont)

Innen (pl. a két egyenlet kivonása után) $d = 52$, (1 pont)

és visszahelyettesítés után $a_1 = -39$. (1 pont)

A sorozat ötödik tagja $\boldsymbol{a_5 = a_1 + 4d = 169}$.

(A sorozat első öt tagja: -39, 13, 65, 117, 169.) (1 pont)

b) Ha a sorozat második tagja $b$, hányadosa pedig $q$ $(b \neq 0, q \neq 0)$, akkor a sorozat első négy tagja rendre:

$\frac{b}{q}, b, bq, bq^2$. (1 pont)

A feltétel szerint $\frac{b}{q} + bq = 26$ és $b + bq^2 = 130$. (1 pont)

Az első egyenletből ($q$-val való szorzás után):

$b + bq^2 = 26q$. (1 pont)

Ezt a második egyenlettel összehasonlítva kapjuk, hogy $26q = 130$, vagyis $q = 5$ (1 pont)

visszahelyettesítéssel pedig $b = 5$. (1 pont)

A sorozat ötödik tagja $\boldsymbol{bq^3 = 5^4 = 625}$. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

A sorozat első négy tagja:

$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3$ $(b_1 \neq 0, q \neq 0)$. (1 pont)

A feltétel szerint $b_1 + b_1q^2 = 26$ és $b_1q + b_1q^3 = 130$. (1 pont)

Szorzattá alakítva:

$b_1(1+q^2)=26$ és $b_1q(1+q^2)=130$. (1 pont)

Egyik tényező sem nulla, ezért a két egyenlet eloszthatjuk egymással, amiből $q=5$ kapjuk, (1 pont)

ezt visszahelyettesítésve pedig $b_1=1$. (1 pont)

A sorozat ötödik tagja $\boldsymbol{b_5 = b_1q^4 = 5^4 = 625}$.

(A sorozat első öt tagja: 1, 5, 25, 125, 625) (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

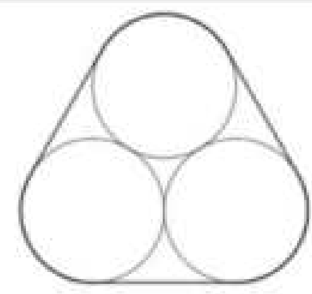
**32) Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.**

**a) András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulás elhanyagolható.) (4 pont)**

**András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.**

**b) Mutassa meg, hogy András állítása hamis! (3 pont)**

**Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)**



**c) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.) (7 pont)**

***Megoldás:***

a) (Az első asztalra érkezés után 0,84 m magasra pattan vissza a pingponglabda, majd az asztal felé esve ugyanekkora távolságot tesz meg a második leérkezésig.) Az első és a második asztalra érkezés között megtett út $2\cdot 0,84=1,68$ méter. (1 pont)

Az egymás után következő két asztalra érkezés között megtett távolságok hossza egy olyan mértani sorozatot alkot, amelynek első tagja 1,68 méter, hányadosa pedig 0,84. (1 pont)

Az első és a 15. asztala érkezés között megtett út hossza a mértani sorozat első 14 tagjának összege: $S_{14}=\dfrac{1,68\cdot(0,84^{14}-1)}{0,84-1}\approx \mathbf{9,59}$ **méter**. (2 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 14. feladat*

c) *Lásd: Térgeometria 35. feladat*

**Összesen: 14 pont**

**33)** **Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a $B(t)=\dfrac{L}{1+\left(\dfrac{L}{B_0}-1\right)\cdot 0,75^t}$ formula szerint alakul. A képletben $t$ az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve $(0\le t\le 30)$, $L$ a város lakosainak száma, $B_0$ pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban $(0<B_0<L)$.**

**Egy nagyvárosban $L=1,5$ millió, $B_0=1000$.**

**a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal? (3 pont)**

**b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint? (6 pont)**

**c) Igazolja, hogy ha $L$ és $K$ adott pozitív számok, $n\in\mathbb{N}^+$, akkor a $b_n=\dfrac{L}{1+K\cdot 0,75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekedő, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$. (7 pont)**

***Megoldás:***

a) (A $t=5$ helyettesítést alkalmazzuk.)

$$B(5)=\frac{1,5\cdot 10^6}{1+\left(\frac{1,5\cdot 10^6}{1000}-1\right)\cdot 0,75^5}\approx$$ (1 pont)

$\approx 4204,98,$ (1 pont)

azaz kb. **4200** betegre lehet számítani. (1 pont)

b) A lakosság 10%-a 150 ezer fő. (1 pont)

Jelölje $t$ a kérdezett napok számát.

$$\frac{1,5\cdot 10^6}{1+\left(\frac{1,5\cdot 10^6}{1000}-1\right)\cdot 0,75^t}=1,5\cdot 10^5$$ (1 pont)

$10=1+1499\cdot 0,75^t$

$\dfrac{9}{1499}=0,75^t$ (1 pont)

$t=\log_{0,75}\dfrac{9}{1499}\approx$ (1 pont)

$\approx 17,78.$ (1 pont)

Azaz kb. **18 nap** múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött $(18<30)$.

(1 pont)

c) *Lásd: Bizonyítások 33. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**34)** **Van egy részvénycsomagunk, amely 6600 Ft-os és 4800 Ft-os névértékű részvényeket tartalmaz. A részvényeink névértékének összege 131400 Ft.**

**Ha a 4800 Ft-os névértékű részvényeink harmadát 6600 Ft-osra cserélnénk, akkor a névértékek összege 140400 Ft-ra növekedne.**

**a) Hány darab részvényünk van az egyes fajtákból? (9 pont)**

**Van két, most induló hosszú távú befektetésünk is. Az egyiknél 500000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik.**

**b) Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Szöveges feladatok 38. feladat*

b) Jelölje $n$ a keresett hónap sorszámát.

$450000 \cdot 1{,}013^n > 500000 \cdot 1{,}01^n$ (2 pont)

$\left(\frac{1{,}013}{1{,}01}\right)^n > \frac{50}{45} = \frac{10}{9}$ (1 pont)

A tízes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekedő, (1 pont)

ezért $n \lg \frac{1{,}013}{1{,}01} > \lg \frac{10}{9}$,

közelítő értékkel $n \lg 1{,}003 > \lg 1{,}111$. (1 pont)

$n > \lg \frac{1{,}111}{1{,}013} \approx 35{,}1$. (1 pont)

**Tehát a 36. hónap** végén lesz először több pénz a második befektetésben. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

Jelölje $n$ a keresett hónap sorszámát.

$450000 \cdot 1{,}013^n > 500000 \cdot 1{,}01^n$ (2 pont)

$\left(\frac{1{,}013}{1{,}01}\right)^n > \frac{50}{45} = \frac{10}{9}$ (1 pont)

Az 1-nél nagyobb alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekedő, (1 pont)

ezért $n > \log_{\frac{1{,}013}{1{,}01}}\left(\frac{10}{9}\right)$. (1 pont)

$\log_{\frac{1{,}013}{1{,}01}}\left(\frac{10}{9}\right) \approx 35{,}5$. (1 pont)

**Tehát a 36. hónap végén lesz először több pénz a második befektetésben.** (1 pont)

**Összesen: 15 pont**

**35) Tekintsük az $(a_n)$ sorozatot: $a_1 = \binom{2}{2} = 1$, $a_2 = \binom{3}{2} = 3$, $a_3 = \binom{4}{2} = 6$ és így tovább, $a_n = \binom{n+1}{2}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.**

**a) Számítsa ki az $(a_n)$ sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását! (4 pont)**

**b) A fenti $(a_n)$ sorozatból képezzük a $(b_n)$ sorozatot: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.**

**Mennyi a $(b_n)$ sorozat határértéke?** **(4 pont)**

**A $(c_n)$ számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első $n$ tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300 $(n \in \mathbb{N}^+)$.**

**c) Határozza meg $n$ értékét!** **(8 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Statisztika 23. feladat*

b) $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{n+2}{2}}{\binom{n+1}{2}} = \frac{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)n}{2}} =$ (1 pont)

$= \frac{n+2}{n} =$ (1 pont)

$= 1 + \frac{2}{n} =$ (1 pont)

Az $n \mapsto \frac{2}{n}$ sorozat határértéke 0, ezért **a $(b_n)$ sorozat határértéke** $\frac{1+0}{1} = \mathbf{1}$.

(1 pont)

c) A számtani sorozat összegképlete alapján az első $n$ tag összege

$100 = \frac{(2c_1 + (n-1)\cdot 0,25)\cdot n}{2}$, az első $2n$ tag összege

$300 = \frac{(2c_1 + (2n-1)\cdot 0,25)\cdot 2n}{2}$. (2 pont)

Az első egyenletből $2c_1 n + 0,25n^2 - 0,25n = 200$, a második egyenletből $2c_1 n + 0,5n^2 - 0,25n = 300$. (2 pont)

Az első egyenletet kivonjuk a másodikból: $0,25n^2 = 100$, azaz $n^2 = 400$.

(2 pont)

Az egyenlet megoldása $\boldsymbol{n = 20}$ ($n = -20$ nem lehet). (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

A számtani sorozat összegképlete alapján az első $n$ tag összege

$100 = \frac{(2c_1 + (n-1)\cdot 0,25)\cdot n}{2}$, az első $2n$ tag összege

$300 = \frac{(2c_1 + (2n-1)\cdot 0,25)\cdot 2n}{2}$. (2 pont)

Kifejezzük $c_1$-et. Az első egyenletből $2c_1 = \frac{200}{n} - (n-1)\cdot 0,25$, a második egyenletből $2c_1 = \frac{300}{n} - (2n-1)\cdot 0,25$, (2 pont)

így $\frac{200}{n} - (n-1)\cdot 0,25 = \frac{300}{n} - (2n-1)\cdot 0,25$. (1 pont)

Szorzunk $4n$-nel, és rendezünk: $n^2 = 400$. (1 pont)
Az egyenlet megoldása $\boldsymbol{n = 20}$ ($n = -20$ nem lehet). (1 pont)
Ellenőrzés... (1 pont)

***<u>Alternatív megoldás:</u>***

Jelölje $d$ a sorozat differenciáját! $c_{n+1} = c_1 + nd$, $c_{n+2} = c_2 + nd$, és így tovább: a sorozat első $n$ tagja összegénél $n \cdot nd = n^2 d$-vel nagyobb a sorozat második $n$ tagjának az összege. (2 pont)
A második $n$ tag összege $300 - 100 = 200$, (1 pont)
ez pedig $200 - 100 = 100$-zal nagyobb az első $n$ tag összegénél. (1 pont)
Innen $100 = n^2 d$. (1 pont)
Mivel $d = 0,25$, így $n^2 = 400$. (1 pont)
Az egyenlet megoldása $\boldsymbol{n = 20}$ ($n = -20$ nem lehet). (1 pont)
Ellenőrzés... (1 pont)

**Összesen: 16 pont**